

Fachhochschule für Technik und Wirtschaft
Fachbereich 2 / Ingenieurwissenschaften II
Labor Meßtechnik

Anleitung für das Praktikum :

Ermittlung kritischer Drehzahlen

Inhalt :

- 1 Versuchsziel
- 2 Aufgaben zur Vorbereitung des Versuches
- 3 Grundlagen
- 4 Geräteaufbau und Funktion
- 5 Versuchsdurchführung
 - 5.1 Aufgabenstellung
 - 5.2 Vereinfachungen
 - 5.3 Berechnungen und Berechnungsgrundlagen
 - 5.3.1 Kritische Drehzahl n_{krit}
 - 5.3.2 Eigenvektoren und Eigenformen
 - 5.4 Messwertaufnahme
 - 5.5 Versuchsauswertung
- 6 Übersicht der Formelzeichen

1 Versuchsziel

- Demonstration von Resonanz, Selbstzentrierung und Schwingungsformen
- Kennenlernen von Verfahren zur Bestimmung der kritischen Drehzahl



2 Aufgaben zur Vorbereitung des Versuches

- Einarbeiten in den Versuch nach Versuchsanleitung
- Vertrautmachen mit dem Berechnungsalgorithmus lt. Anleitung (Symbole, Begriffe, Berechnungen)



3 Grundlagen

Die kritische Drehzahl und die Resonanz sind Phänomene, die in vielen Maschinen und Anlagen eine wesentliche Rolle spielen. Gerade bei umlaufenden Wellen und Rotoren treten bei bestimmten Drehzahlen unzulässig hohe Vibrationen (\Rightarrow hohe Schwingungsamplituden) auf.

Diese Vibrationen bezeichnet man besser als Resonanz von Schwingungen. Bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit überlagern sich die Schwingungen und werden als Resonanzschwingungen sichtbar.

Durch diese Vibrationen werden die Lager der Antriebe stark belastet und es kann unter Umständen sogar zur Zerstörung der Maschine führen.

Für die Praxis bedeutet dies, dass man diese "kritischen Drehzahlen" vermeidet und entweder unter ihr bleibt oder zügig den kritischen Drehzahlbereich überfährt, um dann wieder eine ruhig drehende Welle zu erhalten.

Aus diesem Grunde ist es wichtig zu wissen, bei welchen Drehzahlen solche kritischen Zustände der Welle auftreten können.

Im folgenden Versuchablauf sollen die kritischen Drehzahlen für eine einfache Rotorkonfiguration berechnet und anschließend mit den Messdaten verglichen werden.

Die "strenge Berechnung" der kritischen Zustände eines beliebigen Rotors ist ein recht umfangreiches Unterfangen. Daher werden im folgenden verschiedene vereinfachende Annahmen getroffen. Trotz dieser Vereinfachungen sind die gefundenen Aussagen von grundsätzlicher Natur und lassen die Übertragung der Erkenntnisse auf reale Rotorsysteme zu.

4 Geräteaufbau und Funktion

Das Gerät ist ein modellhafter Aufbau zur Untersuchung kritischer Drehzahlen bei elastischen Rotoren.

Kernstück ist eine elastische Welle mit zwei starren Massescheiben. Um unzulässig große Schwingungsamplituden, die zur Zerstörung des Rotors führen können, zu vermeiden, sind die Massescheiben mit Fanglagern versehen. Diese sind mit dämpfendem Kunststoff ausgefüttert.

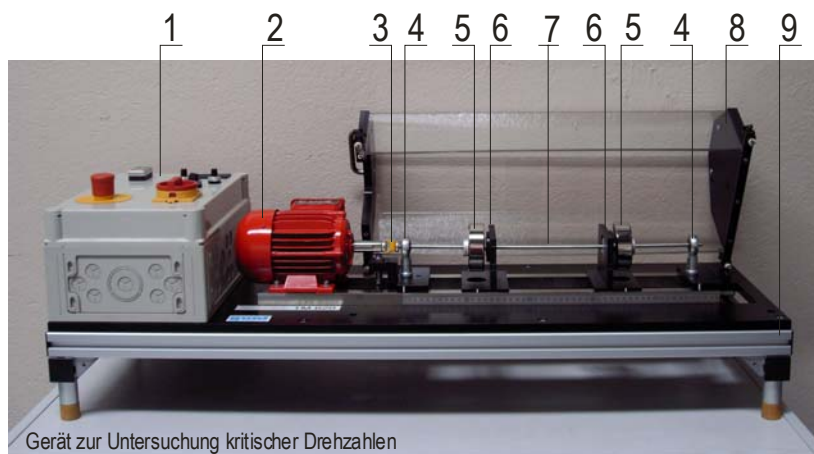
Durch die Fanglager wird auch bei einem evtl. Wellenbruch ein unkontrolliertes Wegfliegen der Scheiben verhindert. Das Lagerspiel ist so groß bemessen, dass im Normalbetrieb keine Berührung zwischen Massescheibe und Fanglager stattfindet.

Der Rotor ist in zwei Gelenklagern gelagert, die auf dem Grundrahmen befestigt sind. Der Grundrahmen besteht aus zwei parallelen Führungsleisten, die einen fluchtenden Aufbau aller Komponenten ermöglicht.

Der Antriebsmotor ist drehzahl geregelt. Um die Beweglichkeit des Rotors nicht zu behindern erfolgt der Antrieb über eine elastische Kupplung mit hoher Radial- und Winkelbeweglichkeit. Damit ist der Kupplungseinfluss auf das Schwingungsverhalten des Rotors sehr gering.

Eine durchsichtige Schutzhaube deckt die rotierenden Teile sicher ab und erlaubt gefahrlos den vollen Einblick in das Schwingungsverhalten des Rotors.

Not-Aus-Schalter, Drehzahlregelung und –anzeige sind in einem Schaltkasten untergebracht.



- 1 – **Schaltkasten**
- 2 – **Antriebsmotor** (Drehzahlbereich 300 ... 3000 min⁻¹)
- 3 – **elastische Kupplung**
- 4 – **Gelenklager** (Typ: winkelbewegliches Pendelkugellager)
- 5 – **Massescheibe** (Material: Stahl, Durchmesser: 80 mm, Masse: je 1 kg)
- 6 – **Fanglager** (fest montiert an Massescheibe, Fanglagerspiel: ± 3 mm)
- 7 – **elastische Welle** (Material: Stahl E = 210000 N/mm², Durchmesser x Länge: 6 x 500 mm)
- 8 – **Schutzhaube**
- 9 – **Grundrahmen**

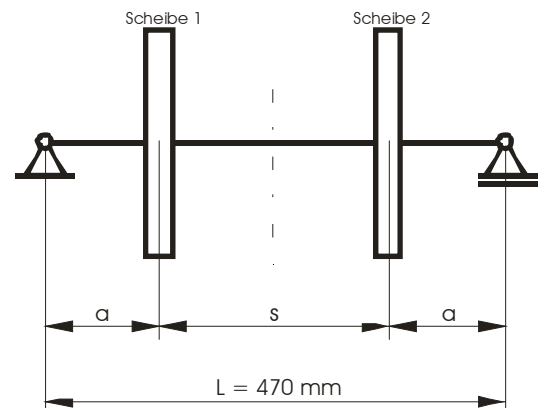
5 Versuchsdurchführung

5.1 Aufgabenstellung

Es wird das Schwingungsverhalten einer mit zwei Massescheiben besetzten, elastischen Welle untersucht.

Eine solche Welle besitzt lt. Theorie zwei Eigenfrequenzen und damit zwei kritische Drehzahlen. Es gibt also genau so viele kritische Drehzahlen wie Massescheiben.

Für jede dieser kritischen Drehzahlen gibt es eine bestimmte Schwingungsform des Rotors.



Es sind die kritischen Drehzahlen sowie die zugehörigen Eigenformen gesucht !

1. Berechnung der kritischen Drehzahlen n_{krit_1} und n_{krit_2} einschl. aller Zwischenwerte (→ 5.3.1)
2. Berechnung der Wellenauslenkung r (r_1 und r_2 ⇒ Vektor der Wellenauslenkung) (→ 5.3.2)
3. Darstellung der Eigenform bei ω_1 und ω_2 (n_{krit_1} bzw. n_{krit_2}) (→ 5.3.2)
4. Messwertaufnahme am Gerät zur Untersuchung kritischer Drehzahlen (→ 5.4)
5. Vergleich der berechneten Werte mit den aufgenommenen Messwerten. (→ 5.5)

5.2 Vereinfachungen

- idealisierte elastische Welle (gerade, kreisrund und masselos)
- keine Dämpfung (schwingungsmäßige Kopplung von Grundrahmen und Rotor durch Lagerung des Grundrahmens auf elastischen Gummifüßen)
- Schiefstellung der Massescheiben infolge der Wellendurchbiegung vernachlässigt

5.3 Berechnungen und Berechnungsgrundlagen

5.3.1 Kritische Drehzahl n_{krit}

Um die kritische Drehzahl einer Welle zu bestimmen, ist die Kenntnis von Scheibenmassen und Wellensteifigkeiten, sowie bei mehrfach besetzten Wellen der Einfluß Abstand-Scheibe-Lager, erforderlich.

Folgende Größen sind bekannt :

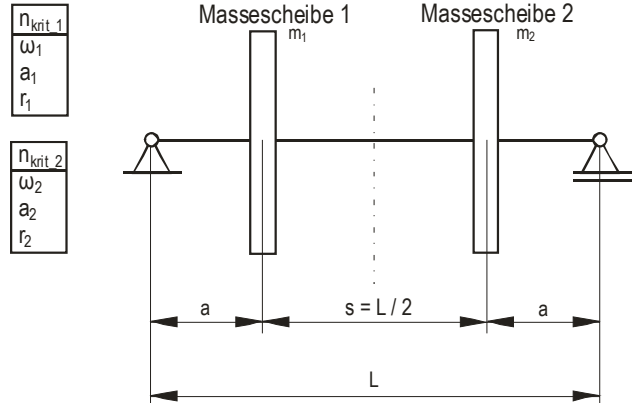
Symmetrischer Versuchsrotor

Welle $E = 210\,000\text{ N/mm}^2$ (Stahl)

$d = 6\text{ mm}$

Scheibe $m = m_1 = m_2 = 1\text{ kg}$

Lager $L = 470\text{ mm}$



$n_{krit\ 1}$
ω_1
a_1
r_1

$n_{krit\ 2}$
ω_2
a_2
r_2

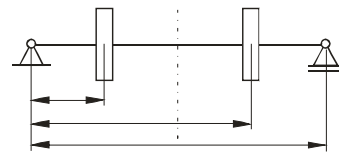
Berechnen und tragen Sie ins Protokoll :

(Formel, Werte, Ergebnis)

① **Abstand Scheibe-Lager a** : (Formel selbstdg.)

Überprüfen Sie den Aufbau !

Vervollständigen Sie hierzu die nebenstd. Skizze :



② **auf Wellenlänge bezogener Abstand Scheibe-Scheibe γ** : $\gamma = s / L$

③ **auf Wellenlänge bezogener Abstand Scheibe-Lager α_1 und α_2** : $\alpha_1 = 1 - 2\gamma^2 + \gamma^4$

$$\alpha_2 = 1 - 4\gamma^2 + 4\gamma^3 - \gamma^4$$

④ **Eigenkreisfrequenzen des Rotors ω_1 und ω_2** :

Es müssen zuvor die Einflußzahlen a_1 und a_2 sowie die Steifigkeit c (einschl. Flächenträgheitsmoment I) berechnet werden.

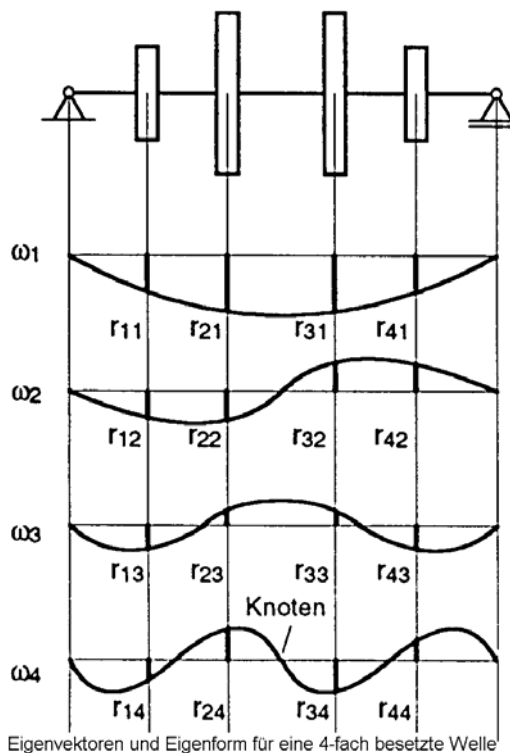
$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{m \cdot (a_1 + a_2)}}$	$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{m \cdot (a_1 - a_2)}}$
$a_1 = \frac{\alpha_1}{c}$	$a_2 = \frac{\alpha_2}{c}$
$c = \frac{48 \cdot E \cdot I}{L^3}$	
$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	

⑤ **Kritische Drehzahlen n_{krit_1} und n_{krit_2}** : $n_{krit_1} = \frac{\omega_1}{2\pi}$ $n_{krit_2} = \frac{\omega_2}{2\pi}$

5.3.2 Eigenvektoren und Eigenformen

Wie in Pkt. 5.1 bereits erwähnt, gibt es bei jeder kritischen Drehzahl eine bestimmte Schwingungsform des Rotors; d.h. die Auslenkungen der Massescheiben haben zueinander ein bestimmtes Verhältnis.

Ein Satz dieser Scheibenauslenkungen für eine bestimmte kritische Drehzahl nennt man Eigenvektor. Durch die Eigenvektoren wird die Form der Wellenverbiegung in der jeweiligen kritischen Drehzahl beschrieben. Für jede Eigenfrequenz hat die Welle eine eigene, charakteristische Durchbiegungsform, die sogenannte Eigenform.



Die Eigenvektoren r_i lassen sich, bis auf einen unbekanntem gemeinsamen Faktor, bestimmen. Man muss daher eine der Auslenkungen vorwählen; z.B. $r_{11} = 1$ setzen.

Die Matrixschreibweise ermöglicht eine übersichtliche Darstellung :

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 1,4 & 1,4 & 1,0 \\ 1,0 & 1,2 & -1,2 & -1,0 \\ 1,0 & -0,7 & -0,7 & 1,0 \\ 1,0 & -1,3 & 1,3 & -1,0 \end{bmatrix}$$

Die Stellen an denen die Welle keine Auslenkung besitzt, die Eigenform also einen Nulldurchgang hat, nennt man Knotenpunkte.

Die Anzahl der Knotenpunkte ist immer um 1 niedriger als die Ordnung der zugehörigen Eigenform.

Für den Versuchsaufbau ergibt sich nun für r die 2x2 Matrix (2-fach besetzte Welle).

Die Eigenvektoren werden mit folgd. Formeln berechnet : (Die Herleitung der Formeln kann im Labor eingesehen werden.)

$$\text{für } \omega_1 : (m a_1 - m (a_1 + a_2)) r_{11} + m a_2 r_{21} = 0$$

$$\text{für } \omega_2 : (m a_1 - m (a_1 - a_2)) r_{12} + m a_2 r_{22} = 0$$

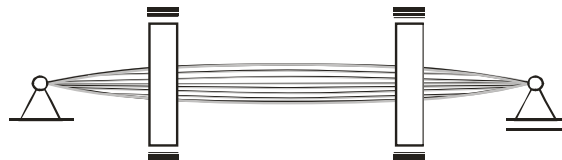
für das Protokoll :

- ① Ausrechnen der Eigenvektoren
- ② Darstellung der Vektoren in Matrizenform
- ③ grafische Darstellung der Eigenformen für ω_1 und ω_2
- ④ Markieren der Knotenpunkte

5.4 Messwertaufnahme

Zum Kennenlernen des Schwingungsverhaltens wird der Rotor langsam durch den gesamten Drehzahlbereich gefahren.

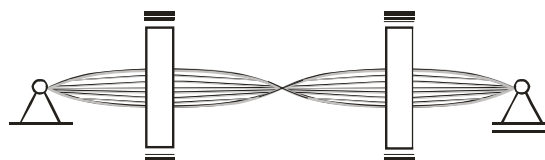
Man kann beobachten, dass die Schwingungsausschläge in der Nähe der ersten kritischen Drehzahl stark anwachsen (Erhöhung der Drehzahl mit Potentiometer 1). Es stellt sich folgende Schwingungsform ein (Vergleich berechneter Wert aus 5.3.1 mit Drehzahlanzeige am Gerät):



1. Kritische Drehzahl

- ① Sobald der Rotor die Fanglager berührt (hartes Laufgeräusch) lesen Sie die Drehzahl $n_{\text{krit}_{1u}}$ ab und notieren diese im Protokoll.
- ② Drehzahl wieder etwas absenken.
Am Potentiometer 2 wird eine Drehzahl eingestellt, die oberhalb der 1. kritischen Drehzahl liegt. Anschließend wird der Schalter zur Drehzahlvorgabe auf den Potentiometer 2 umgeschaltet. Der Rotor beschleunigt nun schnellstmöglich und durchfährt die Resonanz.
- ③ Im überkritischen Bereich wird nun die Drehzahl mit dem Potentiometer 2 wieder langsam abgesenkt bis der Rotor in der Nähe der Resonanz ist und die Fanglager berührt.
- ④ Drehzahl $n_{\text{krit}_{1o}}$ ablesen und im Protokoll notieren.
- ⑤ Die Resonanzdrehzahl ergibt sich nun als Mittelwert aus den beiden Drehzahlen $n_{\text{krit}_{1u}}$ und $n_{\text{krit}_{1o}}$. Berechnen Sie diese.

Beim weiteren Hochfahren (Poti 2) läuft der Rotor ruhig bis er in die Nähe der zweiten kritischen Drehzahl kommt. Hier wachsen die Schwingungsamplituden wieder an und es stellt sich nun folgende Schwingungsform ein (Vergleich berechneter Wert aus 5.3.1 mit Drehzahlanzeige am Gerät):



2. Kritische Drehzahl

Nach Durchfahren der zweiten Resonanz nehmen die Amplituden wieder ab und bleiben bis zur Höchstdrehzahl recht gering.

Es kann vorkommen, dass der Drehzahlbereich des Antriebsmotors nicht ausreicht, um die zweite kritische Drehzahl vollständig zu durchfahren.

Bemerkungen zur Resonanzdurchfahrt:

(siehe Pkt. 5.4 ②)

Die Resonanzdurchfahrt ist so schnell wie möglich zu realisieren, da sonst die Gefahr des Nichtablösens von den Fanglagern besteht; d.h. der Rotor läuft auch weit oberhalb der Resonanz noch in den Fanglagern mit stark überhöhten Amplituden.

Dieser Effekt kommt speziell bei zu hohen Unwuchten vor, z.B. hervorgerufen durch eine verbogene Welle.

Der Rotor ist nur durch Herunterfahren der Drehzahl wieder von den Fanglagern zu lösen.

5.5 Versuchsauswertung

① Vergleichen Sie die aus Pkt. 5.3.1 berechneten Werte für die kritischen Drehzahlen mit den Werten aus der Versuchsdurchführung (gemessen und berechnet).

Ist ein Einfluss der unter Pkt. 5.2 genannten Vereinfachungen zu erkennen ?

② Vergleichen Sie die gesehenen Schwingungsformen mit den ermittelten Eigenvektoren, Eigenformen und Knotenpunkten. Gibt es Übereinstimmungen?

➔ Die wirkliche Auslenkung einer Welle setzt sich aus der Überlagerung aller Eigenvektoren zusammen. Dabei muss eine Gewichtung durchgeführt werden, die den Abstand der Betriebsdrehzahl von den einzelnen Eigenfrequenzen berücksichtigt. So hat z.B. die Eigenform einer 4-fach besetzten Welle bei der 4. Eigenfrequenz auf die Auslenkung der Welle bei Betrieb unterhalb der 1. Eigenfrequenz kaum einen Einfluß. In der Nähe einer kritischen Drehzahl kann daher davon ausgegangen werden, dass die zugehörige Eigenform dominiert und benachbarte Eigenformen vernachlässigbar sind.

6 Übersicht der Formelzeichen

(i – Zählgröße)

Symbol	Bedeutung	Einheit
a	Abstand Scheibe-Lager	mm
a_i	Einflußzahlen	mm/N
c	Steifigkeit	N/mm
d	Durchmesser der Welle	mm
E	Elastizitätsmodul	N/mm ²
I	Flächenträgheitsmoment	mm ⁴
L	Länge der Welle zwischen den Lagern	mm
m, m_i	Masse der Scheibe	kg
$n_{\text{krit}}, n_{\text{krit}_i}$	kritische Drehzahl	min ⁻¹
r	Wellenauslenkung, komplex	-
r_i	Eigenvektoren der Wellenauslenkung	-
α_i	auf Wellenlänge bezogener Abstand Scheibe-Lager	-
γ	auf Wellenlänge bezogener Abstand Scheibe-Scheibe	-
ω_i	Eigenkreisfrequenz des Rotors	s ⁻¹