

Technische Mechanik

Statik · Festigkeitslehre · Kinetik · Maschinendynamik

Formelsammlung

erstellt von Prof. Dr.-Ing. Sebastian Götz

HTW Berlin | Fachbereich 2 | Studiengang Maschinenbau



**Hochschule für Technik
und Wirtschaft Berlin**

University of Applied Sciences

Stand: September 2023

Inhalt

TM1 – Statik.....	3
TM2 – Festigkeitslehre	15
TM3 – Kinetik.....	29
Maschinendynamik	45

Diese Formelsammlung ist ergänzendes Lehrmaterial für die Module der Technischen Mechanik: TM1 (Statik), TM2 (Festigkeitslehre) und TM3 (Kinetik) im Bachelorstudiengang Maschinenbau sowie Maschinendynamik im Masterstudiengang Maschinenbau an der HTW Berlin. Sie ist ausschließlich für den hochschulinternen Gebrauch bestimmt.

Die Inhalte wurden sorgfältig zusammengestellt. Dennoch können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Alle Angaben sind daher ohne Gewähr und der Verfasser übernimmt keine Haftung für die Richtigkeit der gemachten Angaben.

Der Aufbau der Teile TM1, TM2 und TM3 ist an die Formelsammlung Technische Mechanik von Prof. Dr.-Ing. habil. Herbert Balke (TU Dresden, Institut für Festkörpermechanik) angelehnt.

Hinweise, die zur Korrektur oder Verbesserung der Formelsammlung dienen, werden vom Verfasser gerne unter Sebastian.Goetz@HTW-Berlin.de entgegengenommen.

TM1 – Statik

Kräfte und Momente in der Ebene

Komponenten von Kraft und Moment

vektorielle Darstellung der Kraft \vec{F}_i

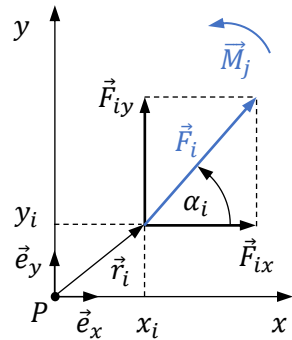
$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= \vec{F}_{ix} + \vec{F}_{iy} \\ &= F_{ix} \cdot \vec{e}_x + F_{iy} \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ kartesische Basisvektoren

mit

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha_i$$



Moment der Kraft \vec{F}_i bezüglich des Punktes P

$$\vec{M}_i^{(K)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M_{iz} \cdot \vec{e}_z$$

mit

$$M_{iz} = x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}$$

Einzelmoment \vec{M}_j senkrecht zur x - y -Ebene

$$\vec{M}_j = M_j \cdot \vec{e}_z$$

Resultierende Kräfte und Momente

resultierende Kraft \vec{F}_R aus n Kräften

$$\vec{F}_R = F_{Rx} \cdot \vec{e}_x + F_{Ry} \cdot \vec{e}_y$$

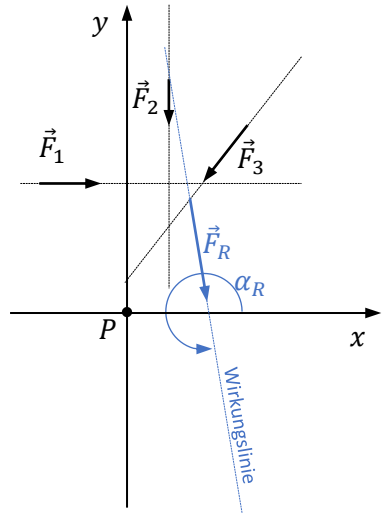
mit

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

Betrag und Richtung von \vec{F}_R

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$



resultierendes Moment \vec{M}_R aus n Kräften und m Momenten
bezüglich des Punktes P

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

$$M_R = \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}}_{\text{Anteil der Einzelkräfte } \vec{F}_i} + \underbrace{\sum_{j=1}^m M_{jz}}_{\text{Anteil der Einzelmomente } \vec{M}_k}$$

Wirkungslinie der resultierenden Kraft (Geradengleichung)

$$y = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \cdot x - \frac{M_R^{(K)}}{F_{Rx}}$$

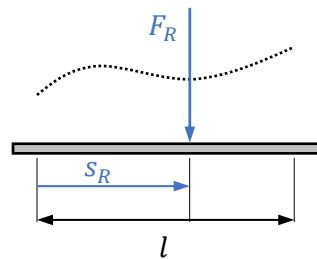
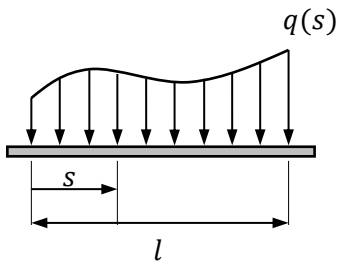
$M_R^{(K)}$: resultierendes Moment
der n Einzelkräfte

Gleichgewichtsbedingungen in der ebenen Statik

$$F_{Rx} = 0, \quad F_{Ry} = 0, \quad M_R = 0$$

Ebene Tragwerke

Resultierende von Streckenlasten



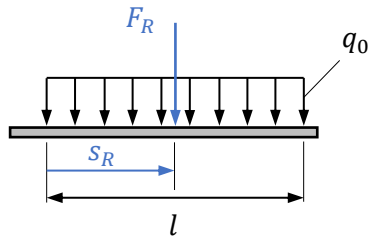
$$F_R = \int_0^l q(s) ds,$$

$$s_R = \frac{1}{F_R} \cdot \int_0^l q(s) \cdot s ds$$

Beispiele

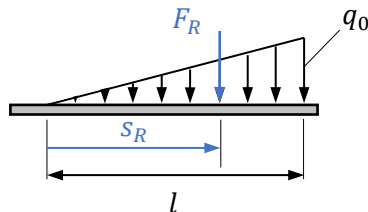
$$F_R = q_0 \cdot l$$

$$s_R = \frac{1}{2} \cdot l$$



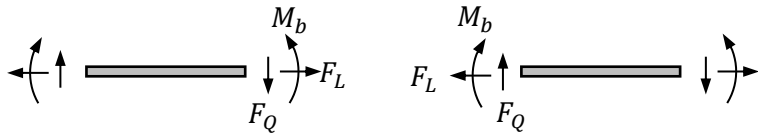
$$F_R = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l$$

$$s_R = \frac{2}{3} \cdot l$$



Schnittreaktionen beim Balken

Richtungskonvention

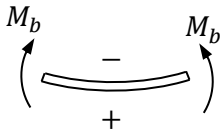


F_L – Längskraft

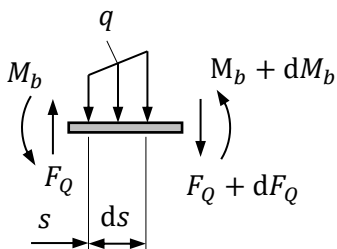
F_Q – Querkraft

M_b – Biegemoment

Richtung des Schnittmoments bei grafischer Darstellung



Beziehungen zwischen M_b , F_Q und q



$$\frac{dF_Q}{ds} = -q$$

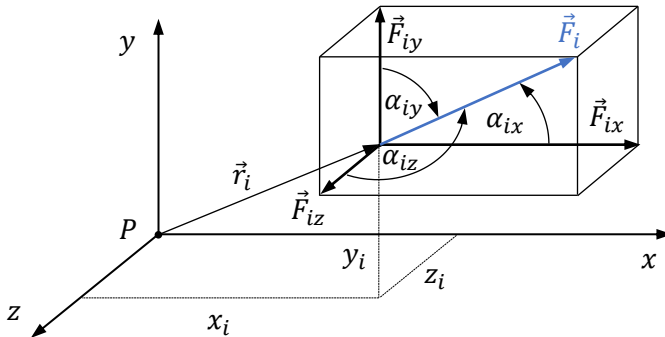
$$\frac{dM_b}{ds} = F_Q$$

$$\frac{d^2 M_b}{ds^2} = -q$$

Kräfte und Momente im Raum

Komponenten von Kraft und Moment

vektorielle Darstellung der Kraft \vec{F}_i



$$\vec{F}_i = F_{ix} \cdot \vec{e}_x + F_{iy} \cdot \vec{e}_y + F_{iz} \cdot \vec{e}_z$$

$$F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2}$$

mit

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha_{ix}, \quad F_{iy} = F_i \cdot \cos \alpha_{iy}, \quad F_{iz} = F_i \cdot \cos \alpha_{iz}$$

Moment $\vec{M}_i^{(K)}$ der Kraft \vec{F}_i bezüglich des Punktes P

$$\vec{M}_i^{(K)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M_{ix} \cdot \vec{e}_x + M_{iy} \cdot \vec{e}_y + M_{iz} \cdot \vec{e}_z$$

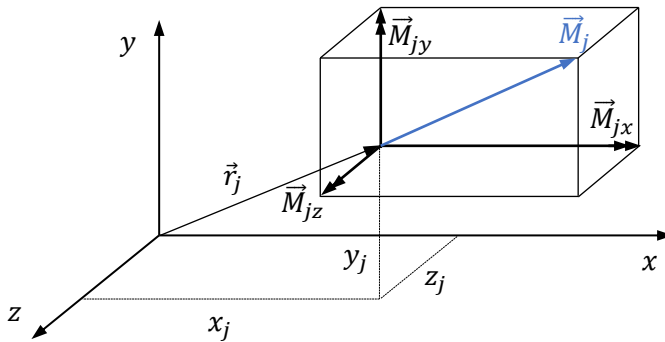
mit

$$M_{ix} = y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}$$

$$M_{iy} = z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}$$

$$M_{iz} = x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}$$

vektorielle Darstellung des Moments \vec{M}_j



$$\vec{M}_j = M_{jx} \cdot \vec{e}_x + M_{jy} \cdot \vec{e}_y + M_{jz} \cdot \vec{e}_z$$

resultierendes Moment \vec{M}_R aus n Kräften und m Momenten

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j$$

Gleichgewichtsbedingungen der räumlichen Statik

$$\vec{F}_R = \vec{0}, \quad \vec{M}_R = \vec{0}$$

bzw. in Vektorkoordinaten

$$F_{Rx} = 0, \quad F_{Ry} = 0, \quad F_{Rz} = 0$$

$$M_{Rx} = 0, \quad M_{Ry} = 0, \quad M_{Rz} = 0$$

Reibung

Haftreibung

maximale Reibkraft

$$|F_{R,\max}| = \mu_0 \cdot F_N$$

F_N – Normalkraft auf Gleitebene

μ_0 – Haftreibungskoeffizient

typische Werte für μ_0 :

Paarung	μ_0 (trocken)	μ_0 (geschmiert)
Stahl-Stahl	0,15	0,10
Stahl-Grauguss	0,20	0,12
Gummi-Asphalt	0,80	0,40

Gleitreibung

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (\text{entgegengesetzt zur Relativgeschwindigkeit})$$

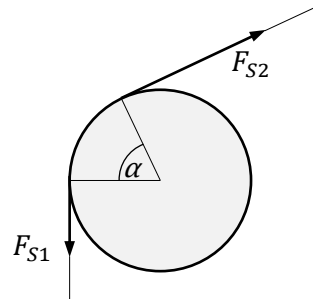
μ – Gleitreibungskoeffizient ($\mu \leq \mu_0$)

Seilreibung

wenn $F_{S2} > F_{S1}$

setzt Gleiten ein, wenn

$$F_{S2} = F_{S1} \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$$



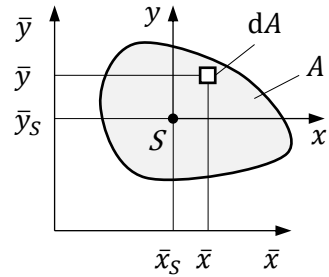
Schwerpunkt ebener Flächen

Allgemeine Berechnung

$$\bar{x}_S = \frac{1}{A} \int_A \bar{x} \, dA$$

$$\bar{y}_S = \frac{1}{A} \int_A \bar{y} \, dA$$

$$A = \int_A 1 \, dA$$

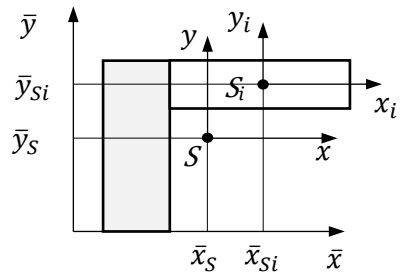


Aus n Teilflächen zusammengesetzte Flächen

$$\bar{x}_S = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{x}_{Si} \cdot A_i$$

$$\bar{y}_S = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{y}_{Si} \cdot A_i$$

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$



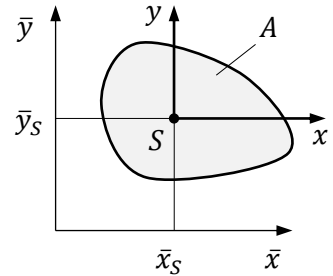
Flächenträgheitsmomente

axiale Flächenträgheitsmomente

$$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA, \quad I_{yy} = \int_A x^2 \, dA$$

Deviationsmomente

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int_A x \cdot y \, dA$$



Satz von STEINER (Transformation in Koordinatensystem (\bar{x}, \bar{y}) , wenn (x, y) Schwerpunktkoordinaten)

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_S^2 \cdot A, \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_S^2 \cdot A$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} + \bar{x}_S \cdot \bar{y}_S \cdot A$$

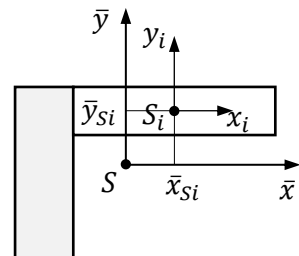
Aus n Teilflächen zusammengesetzte Flächen

(Koordinatensystem (\bar{x}, \bar{y}) im Gesamtschwerpunkt)

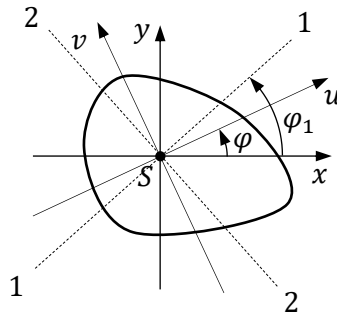
$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \sum_{i=1}^n I_{x_i x_i} + \bar{y}_{S_i}^2 \cdot A_i$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \sum_{i=1}^n I_{y_i y_i} + \bar{x}_{S_i}^2 \cdot A_i$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \sum_{i=1}^n I_{x_i y_i} - \bar{x}_{S_i} \cdot \bar{y}_{S_i} \cdot A_i$$



Transformation auf gedrehtes Koordinatensystem (u, v)



$$I_{uu} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi + I_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{vv} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi - I_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{uv} = -\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cdot \sin 2\varphi + I_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Hauptträgheitsmomente ($I_1 > I_2$)

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Lage der Hauptträgheitsachse 1

$$\tan \varphi_1 = \frac{I_{xy}}{I_{xx} - I_2}$$

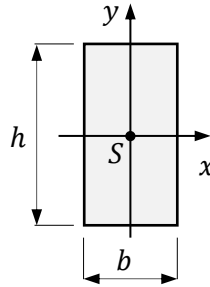
(Hauptträgheitsachse 2 senkrecht dazu)

Beispiele spezieller Querschnitte

$$I_{xx} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{yy} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

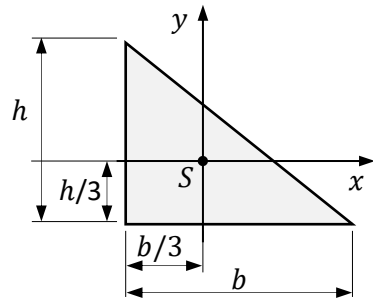
$$I_{xy} = 0$$



$$I_{xx} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

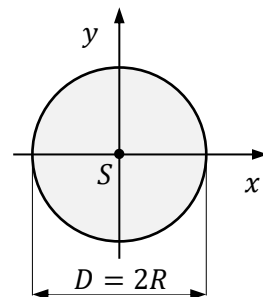
$$I_{yy} = \frac{b^3 \cdot h}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$$



$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0$$



TM2 – Festigkeitslehre

Grundlagen

Spannung

Spannungsvektor

$$\vec{t} = \frac{d\vec{F}}{dA} = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{s}$$

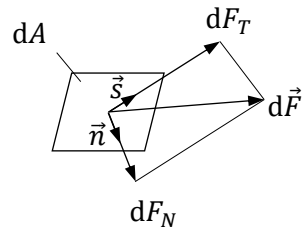
\vec{n} – Normaleneinheitsvektor auf dA

\vec{s} – tangentialer Einheitsvektor auf dA

Koordinaten des Spannungsvektors:

$$\sigma = \frac{dF_N}{dA} \quad \text{Normalspannung}$$

$$\tau = \frac{dF_T}{dA} \quad \text{Schubspannung}$$



Dehnung und Gleitung

Längsdehnung bei homogener Zugbeanspruchung

$$\varepsilon_l = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Querdehnung bei homogener Zugbeanspruchung

$$\varepsilon_q = \frac{b - b_0}{b_0}$$

Gleitung bzw. Schubverzerrung γ : Abweichung von ursprünglich rechtem Winkel

Linearelastisches Materialverhalten

Normalspannungen

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad E_{\text{Stahl}} \cong 210000 \text{ MPa}$$

$$E_{\text{Al-Leg.}} \cong 70000 \text{ MPa}$$

Schubspannungen

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Querkontraktionszahl

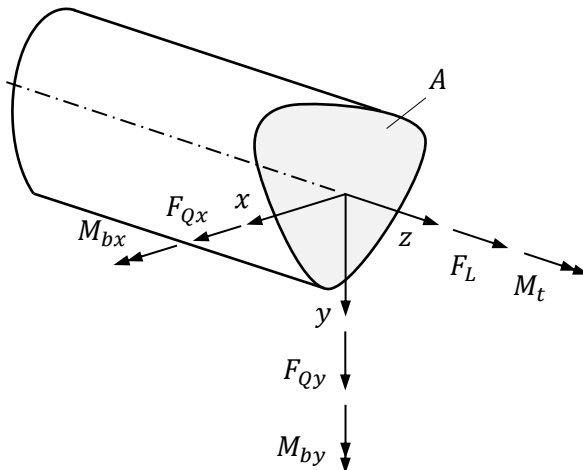
$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l}$$

Zusammenhang zwischen elastischen Konstanten

$$E = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot G \quad \nu_{\text{Stahl}} \cong 0,3, \quad \nu_{\text{Al-Leg.}} \cong 0,35$$

Grundbeanspruchungen in Linientragwerken

Schnittlasten



Zug und Druck in Stäben

Spannung

$$\sigma_{zz} = \frac{F_L}{A}$$

Dehnung

$$\varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz} = \frac{F_L}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T$$

u_z – Verschiebung in z-Richtung

α – Wärmeausdehnungskoeffizient

ΔT – Temperaturdifferenz

Längenänderung des Stabes der Länge l

$$\Delta l = \int_{z=0}^l \frac{F_L(z)}{E \cdot A(z)} dz$$

Sonderfall $F_L = \text{konst.}$ und $A = \text{konst.}$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \Delta l = \frac{F_L \cdot l}{E \cdot A}$$

Torsion prismatischer Stäbe

maximale Schubspannung

$$|\tau_{\max}| = \frac{|M_{t,\max}|}{W_t}$$

Verdrehwinkel des Querschnitts

$$\varphi = \int_{z=0}^l \frac{M_t(z)}{G \cdot I_t(z)} dz$$

Sonderfall $M_t = \text{konst.}$ und $I_t = \text{konst.}$

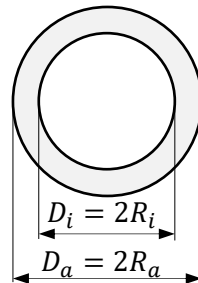
$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t}$$

Kenngrößen spezieller Querschnitte

Kreisring

$$I_t = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32} (D_a^4 - D_i^4)$$

$$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_a^4 - R_i^4}{R_a} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D_a^4 - D_i^4}{D_a}$$



Rechteckquerschnitte mit $h > b$

$$I_t = c_1 \cdot h \cdot b^3$$

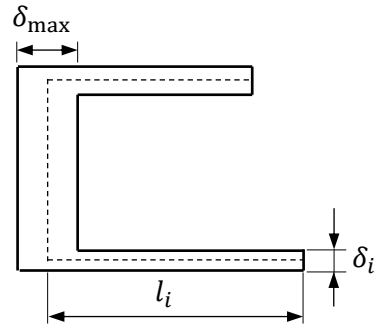
$$W_t = c_2 \cdot h \cdot b^2$$

h/b	1	2	4	10	∞
c_1	0,141	0,229	0,281	0,312	0,333
c_2	0,208	0,246	0,282	0,312	0,333

dünnwandige Profile mit offenem Querschnitt

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_i l_i \cdot \delta_i^3$$

$$W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}}$$



Biegung gerader Balken

Spannungen bei gerader Biegung und überlagerter Längskraft
(gerade Biegung: x, y sind Hauptträgheitsachsen)

$$\sigma_{zz}(x, y) = \frac{F_L}{A} + \frac{M_{bx}}{I_{xx}} \cdot y + \frac{M_{by}}{I_{yy}} \cdot x$$

allgemeiner Fall (schiefe Biegung: x, y sind beliebige
Schwerpunktsachsen)

$$\sigma_{zz}(x, y) = \frac{F_L}{A} + \frac{M_{bx}I_{xy} - M_{by}I_{xx}}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2} x + \frac{M_{bx}I_{yy} - M_{by}I_{xy}}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2} y$$

Differentialgleichung der Biegelinie (v – Biegeverformung)

$$\frac{d^2v}{dz^2} = v'' = -\frac{M_b(z)}{E \cdot I}$$



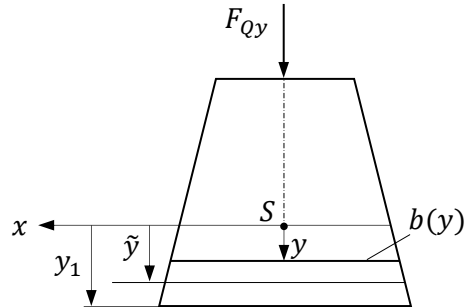
Schubspannungen infolge Querkraft

kompakte Querschnitte

$$\tau_{xy}(y) = \frac{F_{Qy} \cdot S_x(y)}{I_{xx} \cdot b(y)}$$

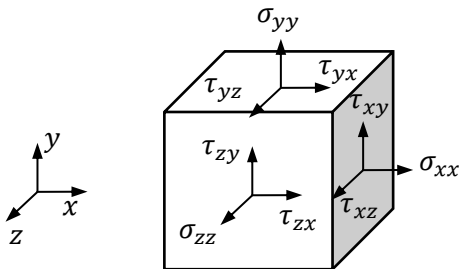
mit

$$S_x(y) = \int_y^{y_1} \tilde{y} \cdot b(\tilde{y}) \, d\tilde{y}$$



Allgemeiner Beanspruchungszustand

Räumlicher Spannungszustand



Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau_{kl} = \tau_{lk}$$

Bestimmung der Hauptspannungen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
(Eigenwerte des Spannungstensors)

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \cdot \sigma^2 + \dots$$

$$(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \cdot \sigma - \dots$$

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 0$$

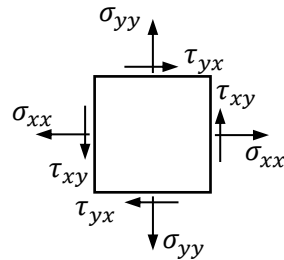
Maximale Schubspannung

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

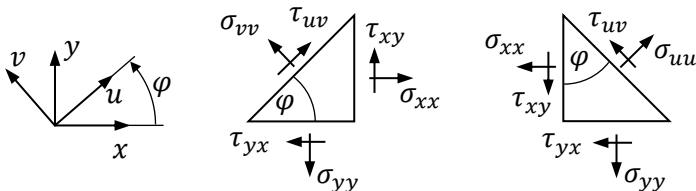
Ebener Spannungszustand

eine Hauptspannung $\sigma_i = 0$

bzw. $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0$



Spannungen an um φ gedrehten Schnitt



$$\sigma_{uu}(\varphi) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{vv}(\varphi) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$\tau_{uv}(\varphi) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Hauptspannungen in der Ebene

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hauptspannungsrichtungen in der Ebene

$$\tan \varphi_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_2} \qquad \tan \varphi_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_1}$$

Räumlicher Verzerrungszustand

Verschiebungsvektor

$$\vec{u} = u_x \cdot \vec{e}_x + u_y \cdot \vec{e}_y + u_z \cdot \vec{e}_z$$

Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma_{kl} = \gamma_{lk}$$

Dehnungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Gleitungen

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Hauptdehnungen analog zu Hauptspannungen

ebener Verzerrungszustand für $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$

Verallgemeinertes HOOKEsches Gesetz

Räumlicher Spannungszustand

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right) + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right) + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right) + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{zx}$$

bzw. nach Spannungen umgestellt

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right) \dots$$

$$- \frac{1}{1 - 2\nu} E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right) \dots$$

$$- \frac{1}{1 - 2\nu} E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right) \dots$$

$$- \frac{1}{1 - 2\nu} E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx}$$

Ebener Spannungszustand

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy}) + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx}) + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} = 0$$

bzw. nach Spannungen umgestellt

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{1 - \nu} E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}) - \frac{1}{1 - \nu} E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0$$

Festigkeitshypothesen

Normalspannungshypothese

$$\sigma_{V,NH} = \sigma_1, \quad \text{für } \sigma_1 > 0$$

$$\text{Linientragwerke: } \sigma_{V,NH} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Schubspannungshypothese

$$\sigma_{V,SH} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\text{Linientragwerke } \sigma_{V,SH} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

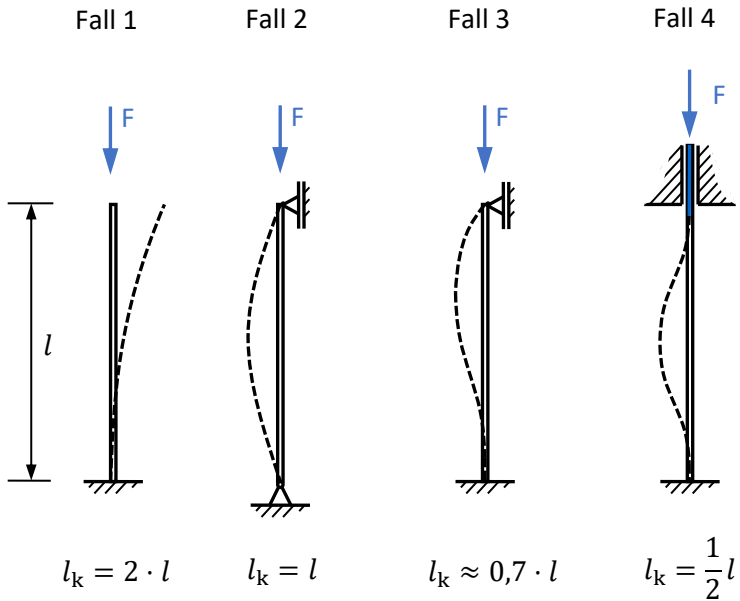
Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\begin{aligned} \sigma_{V,GEH} &= \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xy}^2)}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Linientragwerke } \sigma_{V,GEH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Knicken von Balken

Knicklängen l_K der 4 EULERSchen Knickfälle



Schlankheitsgrad

$$\lambda = l_k \sqrt{\frac{A}{I_{\min}}}$$

Grenzschlankheitsgrad für elastisches Knicken

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dp}}} \quad \sigma_{dp} - \text{Druckfließgrenze}$$

elastisches Knicken: $\lambda > \lambda_0$

inelastisches Knicken: $\lambda < \lambda_0$

Knickkraft bei elastischem Knicken

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{l_k^2}$$

Knickspannung bei inelastischem Knicken (nach TETMAJER)

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = a + b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

Beispiele

Werkstoff	a/MPa	b/MPa	c/MPa	λ_0
S235	310	-1,14	0	105
S355	335	-0,62	0	88
GJL 200	776	-12	0,053	80

TM3 – Kinetik

Kinematik des Körperpunktes

Geradlinige Bewegung (skalare Kinematik)

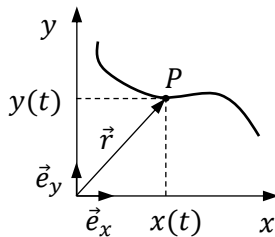
Weg $s(t)$

Geschwindigkeit $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}$

Beschleunigung $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$

Allgemeine ebene Bewegung (vektorielle Kinematik)

Beschreibung in kartesischen Koordinaten



Ortsvektor $\vec{r}(t) = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$

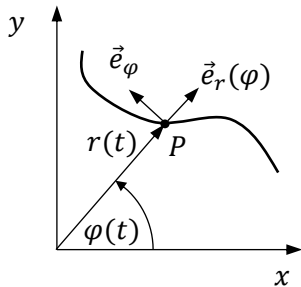
Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x} \cdot \vec{e}_x + \dot{y} \cdot \vec{e}_y$

Betrag $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x} \cdot \vec{e}_x + \ddot{y} \cdot \vec{e}_y$

Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

Beschreibung in Polarkoordinaten



$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Ortsvektor $\vec{r}(t) = r \cdot \vec{e}_r(\varphi)$

Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + (r\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi$

Betrag $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}$

Beschleunigungsvektor

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi$$

Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$

Kinetik starrer Körper

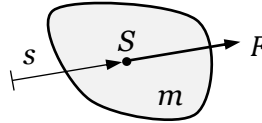
Grundgesetze der Dynamik

Impuls bei geradliniger Bewegung (Masse $m = \text{konst.}$)

$$\vec{p} = m \cdot \dot{s}$$

Impulserhaltung

$$\vec{p} = \vec{F} = m \cdot \vec{\dot{s}}$$

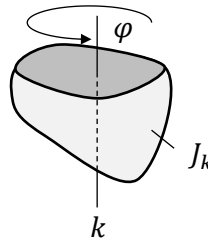


Drehimpuls bei Rotation um Achse k

$$\vec{L} = J_k \cdot \vec{\varphi} \quad J_k - \text{Massenträgheitsmoment bzgl. Achse } k$$

Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \vec{M} = J_k \cdot \vec{\varphi}$$



Berechnung von Massenträgheitsmomenten

Definition

Massenträgheitsmoment durch Schwerpunktsachse k

$$J_{kS} = \int_m r^2 \, dm \quad r - \text{Abstand zur Drehachse durch Schwerpunkt}$$

bzw.

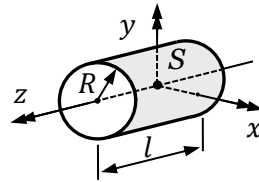
$$J_{kS} = \int_m \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \, dm \quad \hat{x}^2, \hat{y}^2 - \text{kartesische Schwerpunktkoordinaten}$$

Massenträgheitsmomente spezieller homogener Körper

Kreiszyylinder

$$J_{xS} = J_{yS} = \frac{m}{12}(3R^2 + l^2)$$

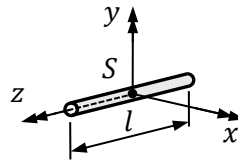
$$J_{zS} = \frac{m}{2}R^2$$



Sonderfall: dünner Stab ($R \ll l$)

$$J_{xS} = J_{yS} = \frac{m}{12}l^2$$

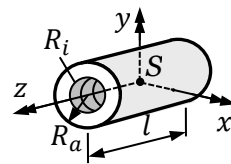
$$J_{zS} = \frac{m}{2}R^2$$



Hohlzylinder

$$J_{xS} = J_{yS} = \frac{m}{12}(3R_a^2 + 3R_i^2 + l^2)$$

$$J_{zS} = \frac{m}{2}(R_a^2 + R_i^2)$$

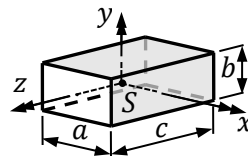


Quader

$$J_{xS} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

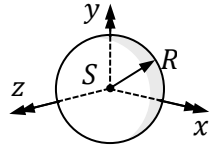
$$J_{yS} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$J_{zS} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$



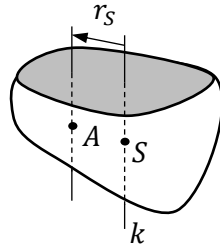
Kugel

$$J_{xS} = J_{yS} = J_{zS} = \frac{2}{5} m R^2$$



Transformation auf parallele Achse

$$J_{kA} = J_{kS} + m \cdot r_S^2 \quad (\text{Satz von STEINER})$$

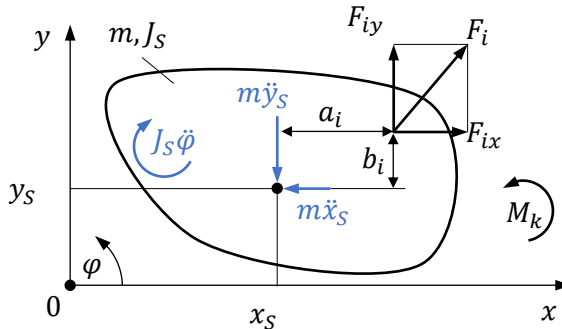


Zusammengesetzte Körper

Massenträgheitsmomente bezogen auf die gleiche Drehachse können addiert werden.

Aufstellen von Bewegungsgleichungen für ebene Bewegungen nach d'ALEMBERT

Statische Interpretation der Impuls- und Drehimpulsbilanzen



dynamische Gleichgewichtsbilanzen bezogen auf Schwerpunkt

$$\sum_i F_{ix} - m\ddot{x}_S = 0 \qquad \sum_i F_{iy} - m\ddot{y}_S = 0$$

$$\overset{\curvearrowright}{S)} \sum_i (F_{iy}a_i - F_{ix}b_i) + \sum_k M_k - J_S\ddot{\varphi} = 0$$

Dynamische Gleichgewichtsbilanzen bezogen auf Bezugspunkt 0

$$\sum_i F_{ix} - m\ddot{x}_S = 0 \qquad \sum_i F_{iy} - m\ddot{y}_S = 0$$

$$\overset{\curvearrowright}{0)} \sum_i (F_{iy}(x_S + a_i) - F_{ix}(y_S + b_i)) + \sum_k M_k \dots$$

$$-x_S \cdot m\ddot{y}_S + y_S \cdot m\ddot{x}_S - J_S\ddot{\varphi} = 0$$

Folgerungen aus der Bewegungsgleichung für ebene Bewegungen

Impulssätze

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} M_A(t) dt = J_A\dot{\varphi}_1 - J_A\dot{\varphi}_0$$

Arbeitssätze

$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{F}(s) ds = \frac{m}{2} \vec{v}_1^2 - \frac{m}{2} \vec{v}_0^2 = T_1 - T_0$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_A(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}_1^2 - \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}_0^2 = T_1 - T_0$$

Mechanischer Energiesatz (nur für Potentialkräfte)

$$U_0 + T_0 = U_1 + T_1$$

- kinetische Energie (Translation) $T = \frac{m}{2} v^2$
- kinetische Energie (Rotation) $T = \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2$
- elastische Federenergie $U = \frac{c}{2} s^2$
- potentielle Energie der Masse $U = mgh$

Gerader zentrischer Stoß

Geschwindigkeiten vor dem Stoß: v_1, v_2

Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$\tilde{v}_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Stoßzahl:

$$k = \frac{\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1}{v_1 - v_2}$$

Schwingungen mit dem Freiheitsgrad 1

Freie Schwingungen

Ungedämpfte freie Schwingung

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

in normierter Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0 \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

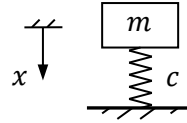
Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

mit

$$\hat{x} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{Amplitude}$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0 \cdot x_0}{v_0}\right) \quad \text{Nullphasenwinkel}$$



Analoge Berechnung für Drehschwingungen mit J, c_T, φ

Viskos gedämpfte freie Schwingung

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

in normierter Form

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \text{Abklingkonstante}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

LEHRsches Dämpfungsmaß

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

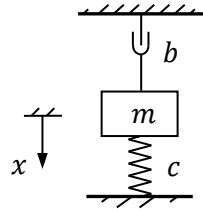
Lösung der Bewegungsgleichung für $D < 1$ (schwache Dämpfung)

$$x(t) = C \cdot e^{-D\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_D t + \varphi_0)$$

Konstanten folgen aus Anfangsbedingungen x_0 und v_0

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + D\omega_0 x_0}{\omega_D}\right)^2}$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_D}{v_0 + D\omega_0 x_0}\right)$$



Bestimmung der Dämpfungsparameter aus Ausschwingkurve

logarithmisches Dekrement

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t + n \cdot T_D)} \right) \quad T_D - \text{Periodendauer}$$

Zusammenhänge zu anderen Dämpfungsparametern

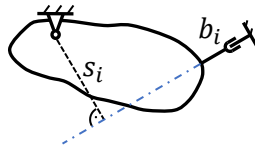
$$D = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}$$

$$\delta = \frac{\lambda}{T_D}$$

Allgemeine Drehschwingung

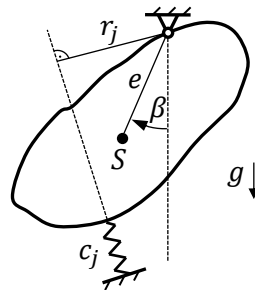
resultierende rotatorische Dämpferkonstante

$$b_D = \sum_i (b_i \cdot s_i^2)$$



resultierende rotatorische Federkonstante

$$c_D \approx \sum_j (c_j \cdot r_j^2) + m \cdot g \cdot e \cdot \cos \beta$$



Erzwungene Schwingungen

Abstimmungsverhältnis $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

allgemeine Lösung inhomogener DGL:

$$x = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}}$$

homogene Lösung x_{hom} siehe freie Schwingung

partikuläre x_{part} Lösung (stationärer Zustand):

$$x_{\text{part}} = \hat{x} \cdot \sin(\Omega t - \varphi)$$

Ω – Erregerkreisfrequenz

φ – Phasenwinkel zwischen Erregung und Antwort

\hat{x} – Schwingungsamplitude im stationären Zustand

$$\hat{x} = x_{\text{stat}} \cdot V \quad V - \text{Vergrößerungsfunktion}$$

x_{stat} – statische Auslenkung

Harmonische Krafterregung

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \hat{F} \cdot \sin(\Omega t)$$

Parameter der partikulären Lösung

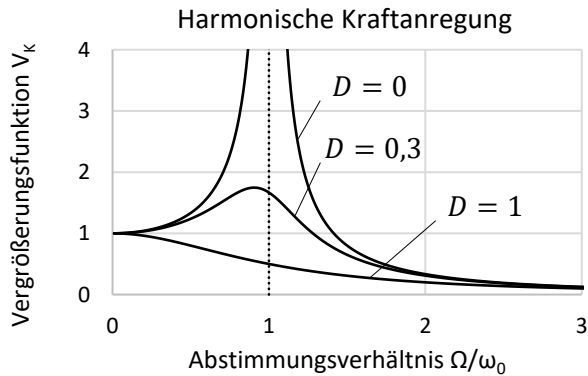
$$x_{\text{stat}} = \frac{\hat{F}}{c}$$

$$V_K = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right)$$

maximale Auslenkung

$$\eta_{\max} = \sqrt{1 - 2D^2} \qquad V_{K,\max} = \frac{1}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$



Harmonische Unwuchtanregung

Bewegungsgleichung

$$(m + m_U)\ddot{x} + b\dot{x} + cx = m_U \cdot r_U \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t)$$

Parameter der partikulären Lösung

$$x_{\text{stat}} = \frac{m_U \cdot r_U}{m + m_U}$$

$$V_U = \eta^2 \cdot V_K = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \right)$$

maximale Auslenkung

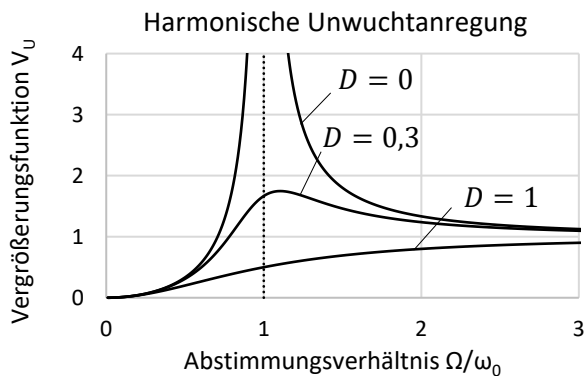
$$\eta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2D^2}} \quad V_{U,\max} = \frac{1}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

Hinweis für Drehschwingungen

$$\hat{\varphi} = \varphi_{\text{stat}} \cdot V_U \quad \text{mit} \quad \varphi_{\text{stat}} = \frac{m_U \cdot r_U \cdot e_U}{J_A}$$

e_U – Abstand Unwuchtschwerpunkt zu Drehpunkt A

J_A – Massenträgheitsmoment um A



Harmonische Stützerregung mit $s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\Omega t)$

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{s}) + c(x - s) = 0$$

Parameter der partikulären Lösung

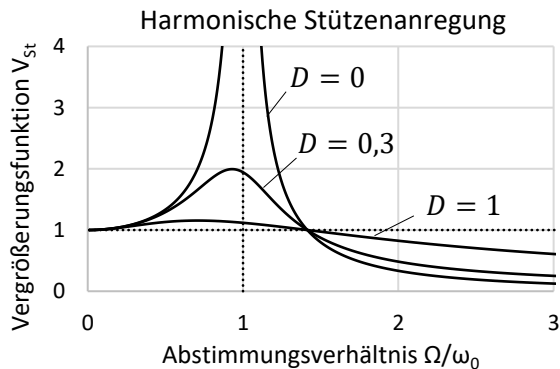
$$x_{\text{stat}} = \hat{s}$$

$$V_{\text{St}} = \sqrt{1 + 4D^2\eta^2} \cdot V_K = \frac{\sqrt{1 + 4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2D\eta^3}{1 - \eta^2(1 - 4D^2)} \right)$$

maximale Auslenkung bei

$$\eta_{\text{max}} = \sqrt{1 - 2D^2} \quad V_{\text{St,max}} \approx \frac{1}{2D} \left(1 + \frac{5}{2}D^2 \right)$$



Maschinendynamik

Dynamik ebener Starrkörpermechanismen

Bewegungsgleichung für generalisierte Koordinate q

$$J_{\text{ers}}(q) \cdot \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{\text{ers}}(q)}{dq} \cdot \dot{q}^2 + \frac{dU(q)}{dq} = Q(q)$$

Ersatzträgheitsmoment

für ebenen Mechanismus mit n starren Gliedern

$$J_{\text{ers}} = \sum_{i=1}^n [m_i (x'_{Si})^2 + m_i (y'_{Si})^2 + J_{Si} (\varphi'_{Si})^2]$$

mit $x'_{Si} = \frac{dx_{Si}}{dq}$ $y'_{Si} = \frac{dy_{Si}}{dq}$ $\varphi'_{Si} = \frac{d\varphi_{Si}}{dq}$

und q – generalisierte Koordinate

Generalisierte Kraft/Moment Q

$$Q = \sum_{i=1}^n (F_{xi} \cdot x'_i + F_{yi} \cdot y'_i + M_i \cdot \varphi'_i)$$

Potentielle Energie

$$U = \sum_{i=1}^n m_i \cdot g \cdot \Delta h_i(q) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} c_j \cdot \Delta l_j(q)^2$$

Ungleichförmigkeitsgrad δ

Definition

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\bar{\omega}}$$

ω – Winkelgeschwindigkeit/Drehzahl des Antriebs

$\bar{\omega}$ – mittlere Winkelgeschwindigkeit während einer Periode

Sonderfall: Arbeitslasten klein gegenüber Trägheitslasten

$$\delta \approx 2 \cdot \frac{\sqrt{J_{\text{ers,max}}} - \sqrt{J_{\text{ers,min}}}}{\sqrt{J_{\text{ers,max}}} + \sqrt{J_{\text{ers,min}}}}$$

Sonderfall: Arbeitslasten groß gegenüber Trägheitslasten

$$\delta \approx \frac{\Delta W}{\bar{\omega}^2 \cdot \bar{J}_{\text{ers}}}$$

mittleres Ersatzträgheitsmoment während einer Periode

$$\bar{J}_{\text{ers}} = \frac{1}{T} \int_0^T J_{\text{ers}}(\varphi) \, d\varphi$$

Periodische Erregung von Schwingungen mit $f = 1$

Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_k \cdot \sin(k \cdot \Omega t + \beta_k)$$

Allgemeine Lösung

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \cdot \sin(k \cdot \Omega t + \beta_k - \varphi_k)$$

mit

$$\hat{x}_k = \frac{\hat{F}_k}{c} \cdot V(k, F, \eta) = \frac{\hat{F}_k}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2\eta^2)^2 + 4D^2k^2\eta^2}}$$

mit den Ordnungszahlen der Harmonischen $k = 1, 2, \dots$

Resonanzstellen bei kleiner Dämpfung ($D \ll 1$):

$$\eta_k \approx \frac{1}{k} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_{k,res} \approx \frac{\omega_0}{k}$$

Fourier-Reihenentwicklung

Zerlegung periodischer Schwingung in Summe aus k harmonischen Schwingungen:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kc} \cdot \cos(k\omega t) + x_{ks} \cdot \sin(k\omega t))$$

Fourier-Koeffizienten k -ter Ordnung:

$$x_{kc} = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T x(t) \cdot \cos(k\omega t) dt$$

$$x_{ks} = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T x(t) \cdot \sin(k\omega t) dt$$

ω – Grundfrequenz periodischer Grundschiwingung

T – Periodendauer periodischer Grundschiwingung

Amplituden der einzelnen Harmonischen

$$\hat{x}_k = \sqrt{x_{kc}^2 + x_{ks}^2}$$

Komplexe Darstellungen von Schwingungen

reelle Darstellung

$$x(t) = \hat{x}_c \cdot \cos(\omega t) + \hat{x}_s \cdot \sin(\omega t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0)$$

$$\text{mit } \hat{x} = \sqrt{\hat{x}_c^2 + \hat{x}_s^2}$$

Darstellung in komplexer Zahlenebene (mit $j = \sqrt{-1}$)

$$\underline{x}(t) = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t - \varphi_0)} = \underline{\hat{x}} \cdot e^{j\omega t}$$

\underline{x} – komplexer Schwingweg

$$\underline{\hat{x}} \text{ – komplexe Amplitude mit } \hat{x} = \sqrt{(\operatorname{Re}(\underline{\hat{x}}))^2 + (\operatorname{Im}(\underline{\hat{x}}))^2}$$

Lineare ebene Schwingungssysteme

Bewegungsgleichung für freie Schwingungen

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

\mathbf{M} – Massenmatrix $\ddot{\mathbf{q}}$ – Beschleunigungsvektor

\mathbf{D} – Dämpfungsmatrix $\dot{\mathbf{q}}$ – Geschwindigkeitsvektor

\mathbf{C} – Steifigkeitsmatrix \mathbf{q} – Verschiebungsvektor

Bestimmung der Systemmatrizen aus Energiebetrachtungen

Kinetische Energie eines Systems mit n starren Körpern

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i (\dot{x}_{Si}^2 + \dot{y}_{Si}^2) + \frac{1}{2} J_i \dot{\phi}_i^2 \right)$$

Elemente der Massenmatrix

$$m_{kl} = m_{lk} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}$$

Potentielle Energie eines Systems mit m diskreten Federn

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} c_i (\Delta l_i)^2 \right) \quad c_i \text{ – Federkonstante}$$

Elemente der Steifigkeitsmatrix

$$c_{kl} = c_{lk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}$$

Dissipationsfunktion für p diskrete Dämpfer

$$F = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{2} b_j \cdot \dot{q}_j^2 \right) \quad b_i - \text{Dämpferkonstante}$$

Elemente der Dämpfungsmatrix

$$d_{kl} = d_{lk} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}$$

Bequemlichkeitshypothese (Rayleigh-Dämpfung)

$$\mathbf{D} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{C} \quad \mathbf{D} - \text{Dämpfungsmatrix}$$

Bestimmung aus LEHRschem Dämpfungsmaß bei zwei Eigenkreisfrequenzen

$$D_i = \frac{\alpha}{2\omega_{0i}} + \frac{\beta\omega_{0i}}{2} \quad D_i - \text{LEHRsches Dämpfungsmaß zu } \omega_{0i}$$

Ungedämpfte Eigenschwingung – Eigenwertproblem

Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen

Lösungsansatz für DGL (Bewegungsgleichung)

$$\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{mit } j = \sqrt{-1}$$

Matrizeneigenwertproblem

$$(\mathbf{C} - \lambda \cdot \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{mit } \lambda = \omega^2$$

Charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \cdot \mathbf{M}) = 0$$

mit den Nullstellen

λ_i – Eigenwerte

$\omega_{0i} = \sqrt{\lambda_i}$ – Eigenkreisfrequenzen

und durch Einsetzen von λ_i in Matrizeigenwertproblem

$\hat{\mathbf{q}}_i$ – Eigenvektoren (Eigenschwingformen)

Berechnung der Eigenschwingung aus Anfangsbedingungen

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n [(a_i \cdot \sin(\omega_{0i}t) + b_i \cdot \cos(\omega_{0i}t)) \cdot \hat{\mathbf{q}}_i]$$

n – Freiheitsgrad des Systems

a_i, b_i – Konstanten, abhängig von Anfangsbedingungen $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$

Abschätzung der unteren Eigenfrequenz nach Dunkerley

$$\omega_D^2 = \frac{1}{\sum \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_i}\right)^2} \geq \omega_{0,\min}^2$$

$\omega_{0,\min}$ – untere Eigenkreisfrequenz (exakt)

ω_D – abgeschätzte untere Eigenkreisfrequenz nach Dunkerley

$\tilde{\omega}_i$ – Eigenkreisfrequenz des Systems, wenn alle Trägheiten mit den Freiheitsgraden $\neq i$ zu Null gesetzt werden

Modaltransformation

Transformation auf modale bzw. Hauptkoordinaten $p(t)$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{p}(t)$$

mit der Modalmatrix

$$\mathbf{V} = [\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_n] \quad (\hat{\mathbf{q}}_i \text{ – Eigenvektor zum } i\text{-ten Eigenwert})$$

Bewegungsgleichung in modalen Koordinaten

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\mu_i) \text{ – modale Massenmatrix}$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} = \boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\lambda_i) \text{ – modale Steifigkeitsmatrix}$$

bzw.

$$\mu_i \cdot \ddot{p}_i + \lambda_i \cdot p_i = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_{0i}^2 = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

Systemantwort bei harmonischer Anregung

Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} = \widehat{\mathbf{F}} \cdot e^{j\Omega t}$$

$\widehat{\mathbf{F}}$ – Erregerkraftamplituden

Ω – Erregerkreisfrequenz

Partikulärlösung für stationären (eingeschwungen) Zustand

Lösungsansatz $\mathbf{q}(t) = \widehat{\mathbf{q}} \cdot e^{j\Omega t}$ führt auf Gleichungssystem

$$(-\Omega^2 \cdot \mathbf{M} + j\Omega \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}) \cdot \widehat{\mathbf{q}} = \widehat{\mathbf{F}}$$

Amplituden im stationären Zustand

$$\widehat{\mathbf{q}} = (-\Omega^2 \cdot \mathbf{M} + j\Omega \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C})^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{F}}$$

mit $(-\Omega^2 \cdot \mathbf{M} + j\Omega \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{H}$ (Frequenzgangmatrix)

Lösung des komplexen Gleichungssystems durch Überführung in reelles Gleichungssystem der Dimension $2n$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} - \Omega^2 \mathbf{M} & -\Omega \mathbf{D} \\ \Omega \mathbf{D} & \mathbf{C} - \Omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{q}}_{Re} \\ \widehat{\mathbf{q}}_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Amplituden im stationären Zustand

$$\widehat{\mathbf{q}} = \sqrt{\widehat{\mathbf{q}}_{Re}^2 + \widehat{\mathbf{q}}_{Im}^2}$$

Phasenwinkel

$$\varphi_i = \arctan\left(\frac{\widehat{\mathbf{q}}_{Im,i}}{\widehat{\mathbf{q}}_{Re,i}}\right)$$

Kraftamplituden für verschiedene Erregerarten

Krafterregung \hat{F}_i

Unwuchterregung $\hat{F}_i = m_U \cdot r_U \cdot \Omega^2$

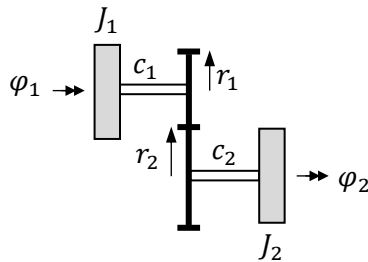
Stützenanregung $\hat{F}_i = \hat{s} \cdot \sqrt{c_F^2 + \Omega^2 \cdot b_F^2}$

\hat{s} – Wegamplitude der Erregung

c_F^2 – Federsteifigkeit zwischen Boden und Masse

b_F^2 – Dämpferkonstante zwischen Boden und Masse

Reduktion von Torsionsschwingungssystemen



Beziehung zwischen Koordinaten an Getriebestufe

$$\varphi_1 \cdot r_1 = \varphi_2 \cdot r_2$$

Reduktion der einzelnen Anteile

Index i der Koordinate auf die reduziert wird

Index j der Koordinate der zu reduzierenden Größe

$$J_{k,\text{red}} = J_k \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^2 \quad \text{Trägheitsmomente}$$

$$c_{k,\text{red}} = c_k \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^2 \quad \text{Torsionsfedersteifigkeiten}$$

$$b_{k,\text{red}} = b_k \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^2 \quad \text{Torsionsdämpferkonstanten}$$

$$M_{k,\text{red}} = -M_k \left(\frac{r_i}{r_j} \right) \quad \text{Erregermomente}$$

Torsionskritische Drehzahlen

Resonanzdrehzahlen (bei schwacher Dämpfung)

$$n_{\text{Res},i} = \frac{\omega_{0,i}}{2\pi} \quad (\text{in } U/s)$$

zusätzlich Resonanz mit Zahneingriffsfrequenz möglich, wenn

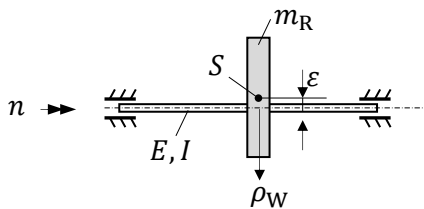
$$\frac{\omega_{0,i}}{2\pi} = n \cdot z_{\text{An}}$$

n – Drehzahl der Welle

z_{An} – Zähnezahl des Zahnrades auf Antriebswelle

Biegekritische Drehzahlen

Einfach belegter Laval-Läufer



Biegekritische Drehzahl

$$n_{\text{krit}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{c_W}{m_R}}$$

c_W – Biegesteifigkeit der Welle

m_R – Rotormasse

Durchbiegung der Welle bei konstanter Drehzahl n :

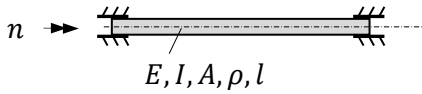
$$\rho_W = \frac{m_W \cdot e \cdot \Omega^2}{c_W - m_W \cdot \Omega^2} = \varepsilon \cdot \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}$$

$\Omega = 2\pi \cdot n$ – Erregerkreisfrequenz

ε – Exzentrizität des Rotorschwerpunktes

$$\omega = \sqrt{\frac{c_W}{m_R}} \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

Homogene Wellen



Erste (untere) Biege-Eigenkreisfrequenz

$$\omega_{0,1} = \lambda_1^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A \cdot l^4}}$$

A – Wellenquerschnittsfläche

ρ – Dichte des Wellenwerkstoffs

l – Lagerabstand

Beiwerte für verschiedene Wellenlagerung

- gelenkig – gelenkig: $\lambda_1^2 = 9,87$
- gelenkig – eingespannt: $\lambda_1^2 = 15,4$
- eingespannt – eingespannt: $\lambda_1^2 = 22,4$

